



## bölüm 3

# TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYODU VE GRAFİKLERİ

### ▶ Periyodik Fonksiyonlar

Belli aralıklarda tekrarlanan fonksiyonlara periyodik fonksiyonlar denir.

$f : A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.

Her  $x \in A$  için,  $f(x + T) = f(x)$  eşitliğini sağlayan bir  $T$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir.

En küçük pozitif  $T$  reel sayısına  $f$  fonksiyonunun periyodu denir.

### Örnek ▶ 1

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , her  $x \in \mathbb{R}$  için,

$$f(x + 5) = f(x)$$

olduğuna göre

a.  $f$  fonksiyonunun periyodu kaçtır?

b.  $f(3) = 7$  ise  $f(8)$  kaçtır?

### Örnek ▶ 2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , her  $x \in \mathbb{R}$  için,  $f(x + T) = f(x)$  tir.

$$f(1) = f(13) = f(31) \text{ olduğuna göre,}$$

**T en fazla kaç olabilir?**

### TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYODU

#### ▶ Sinüs ve Kosinüs

Her  $x \in \mathbb{R}$  ve  $k \in \mathbb{Z}$  için,

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x \text{ olur.}$$

▶ Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyodu  $2\pi$  dir.

Sekant ve kosekant fonksiyonlarının periyodu da  $2\pi$  dir.

#### ▶ Tanjant ve Kotanjant

▶ Her  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  için,  $\tan(x + k\pi) = \tan x$

▶ Her  $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$  için,  $\cot(x + k\pi) = \cot x$  olur.

▶ Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodu  $\pi$  dir.

### $y = a \sin^n(bx + c) + k$ Türündeki Fonksiyonlar

$n$  sıfırdan farklı bir tam sayı ve  $a, b, c, k$  birer reel sayı olmak üzere,

$$y = a \cos^n(bx + c) + k$$

$$y = a \sin^n(bx + c) + k$$

fonksiyonlarının periyodu,

$n$  bir tek tam sayı ise  $\frac{2\pi}{|b|}$  dir.

$n$  bir çift tam sayı ise  $\frac{\pi}{|b|}$  dir.



## Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu ve Grafikleri

**Örnek 3**

- $f(x) = \sin 3x$
- $f(x) = -2 \cos 4x$
- $f(x) = 1 + \sin(5x + 1)$
- $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?

**Örnek 4**

- $f(x) = \sin\left(-\frac{x}{3} - \pi\right)$
- $f(x) = 1 + \cos(3 - 5x)$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?

**Örnek 5**

- $f(x) = 3 + \sin^2\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = 2 - \cos^2\left(\frac{1 - 3x}{4}\right)$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?

**Örnek 6**

$$f(x) = -4 + 3 \sin^7\left(2 - \frac{5x}{3}\right)$$

fonksiyonunun periyodu kaçtır?

 **$y = a \tan^n(bx + c) + k$  Türündeki Fonksiyonlar**

n sıfırdan farklı bir tam sayı ve a, b, c, k birer reel sayı olmak üzere,

$$y = a \tan^n(bx + c) + k$$

$$y = a \cot^n(bx + c) + k$$

fonksiyonlarının periyodu  $\frac{\pi}{|b|}$  dir.

**Örnek 7**

- $f(x) = \tan 2x$
- $f(x) = 2 + \cot 3x$
- $f(x) = 1 - 2 \tan \frac{3x}{4}$
- $f(x) = \cot\left(\frac{-3 + x}{2}\right)$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?

**Örnek 8**

- $f(x) = \tan\left(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$
- $f(x) = -2 - 3 \cot\left(\frac{-x + 5}{6}\right)$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?

**Örnek 9**

- $f(x) = -1 + 2 \tan^4\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$
- $f(x) = 3 \cot^2\left(\frac{1 - x}{2}\right)$

fonksiyonlarının periyodu kaçtır?



**Bilgi**

f fonksiyonunun periyodu  $T_1$ ,

g fonksiyonunun periyodu  $T_2$  olsun.

f ve g fonksiyonlarının toplamı veya farkı olan yeni fonksiyonun periyodu,  $EKOK(T_1, T_2)$  olur.

**Örnek 10**

$$f(x) = \sin 3x + \tan 5x$$

fonksiyonunun periyodu kaçtır?

**Örnek 11**

$$f(x) = \cos^2 6x + \cot 4x$$

fonksiyonunun periyodu kaçtır?

**Örnek 12**

$$f(x) = -2 \sin kx + 3$$

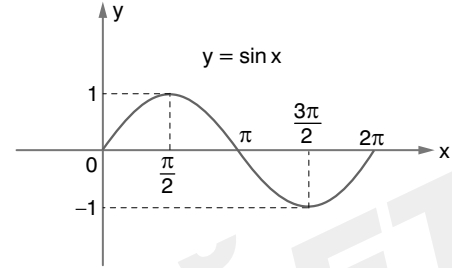
fonksiyonunun periyodu  $\frac{4\pi}{3}$  tür.

Buna göre,  $\tan(k + 1)x$  fonksiyonunun periyodu kaç olabilir?

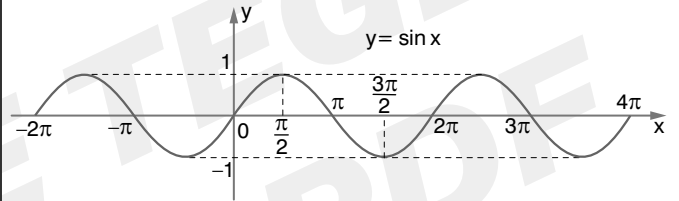
**TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ**

**y = sin x Fonksiyonunun Grafiği**

$[0, 2\pi]$  aralığında  $y = \sin x$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

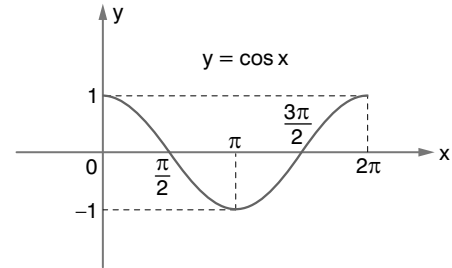


Periyod  $2\pi$  olduğundan, grafik her  $2\pi$  aralığında tekrarlanır.

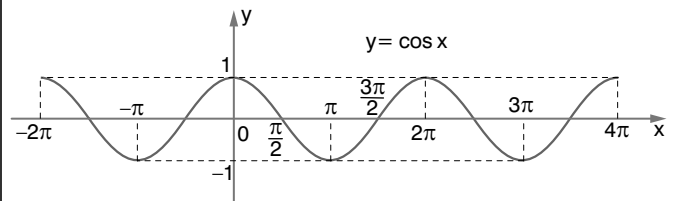


**y = cos x Fonksiyonunun Grafiği**

$[0, 2\pi]$  aralığında  $y = \cos x$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Periyod  $2\pi$  olduğundan, grafik her  $2\pi$  aralığında tekrarlanır.

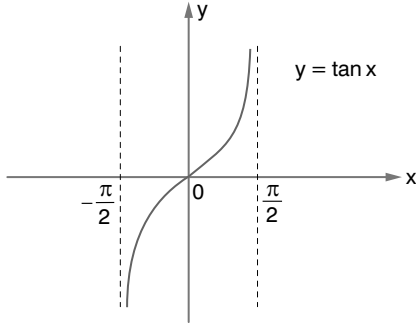




## Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu ve Grafikleri

**y = tan x Fonksiyonunun Grafiği**

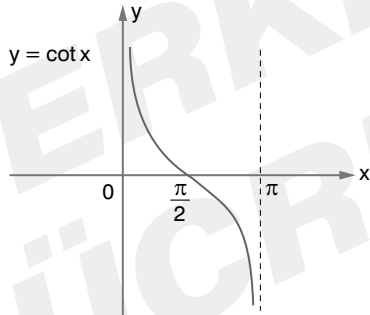
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  aralığında  $y = \tan x$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Periyod  $\pi$  olduğundan, grafik her  $\pi$  aralığında tekrarlanır.  
Tanjant fonksiyonu artan fonksiyondur.

**y = cot x Fonksiyonunun Grafiği**

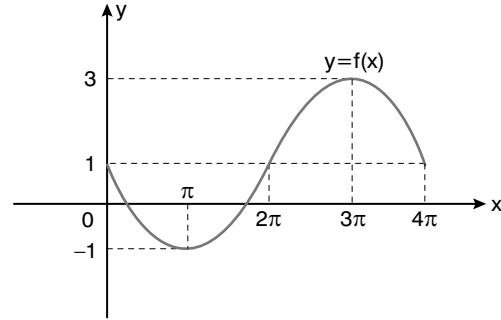
$(0, \pi)$  aralığında  $y = \cot x$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Periyod  $\pi$  olduğundan, grafik her  $\pi$  aralığında tekrarlanır.  
Kotanjant fonksiyonu azalan fonksiyondur.

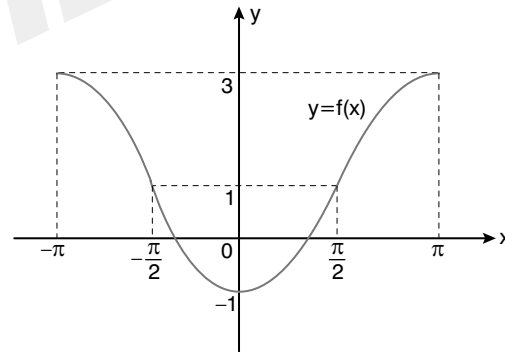
**Bilgi**

Grafik ile ilgili bir test sorusunda; grafik verilip, grafiğin fonksiyonu soruluyorsa, şıklardan gidilerek grafik üzerindeki bazı noktalar seçilip bu noktaları sağlayan fonksiyon bulunabilir.

**Örnek 13**

Şekilde,  $[0, 4\pi]$  aralığında grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $f(x) = 1 + 2\sin x$       B)  $f(x) = 1 - 2\sin 2x$   
C)  $f(x) = 1 - 2\sin \frac{x}{2}$       D)  $f(x) = 1 - 2\cos \frac{x}{2}$   
E)  $f(x) = 1 + 2\cos 2x$

**Örnek 14**

Şekilde,  $[-\pi, \pi]$  aralığında grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

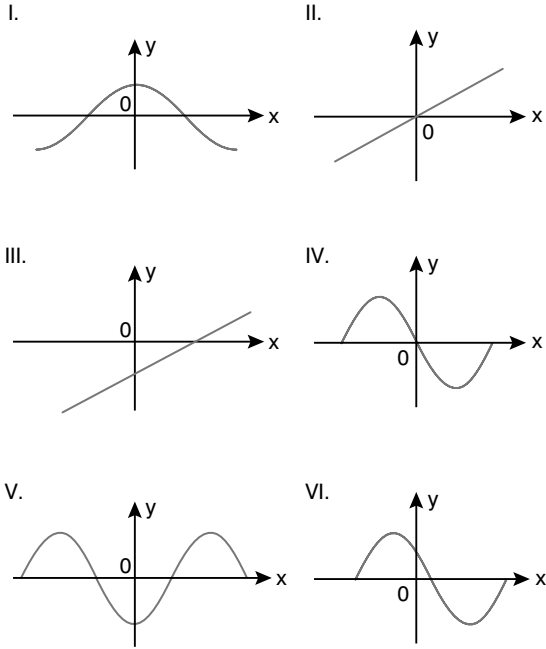
- A)  $f(x) = 1 - \cos x$       B)  $f(x) = 1 + 2\cos x$   
C)  $f(x) = 1 + \cos 2x$       D)  $f(x) = 1 - 2\sin 2x$   
E)  $f(x) = 1 - 2\cos x$





## Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu ve Grafikleri

## Örnek 18



Şekilde grafiği verilen fonksiyonlardan hangileri tek fonksiyon, hangileri çift fonksiyon, hangileri ne tek ne çift fonksiyondur?

## Örnek 19

- I.  $f(x) = x + \tan x$
- II.  $f(x) = \cos x + x^2$
- III.  $f(x) = 3 + \sin 2x$
- IV.  $f(x) = -\cot x$
- V.  $f(x) = \tan^2 x$

fonksiyonlarından hangileri tek fonksiyon, hangileri çift fonksiyon, hangileri ne tek ne çift fonksiyondur?

 $y = a \sin(bx + c) + k$  TÜRÜNDEKİ GRAFİKLER

## y = a · sin x Türündeki Fonksiyonların Grafiği

(a > 0 için)

y = a · sin x veya y = a · cos x grafiklerini çizmek için,

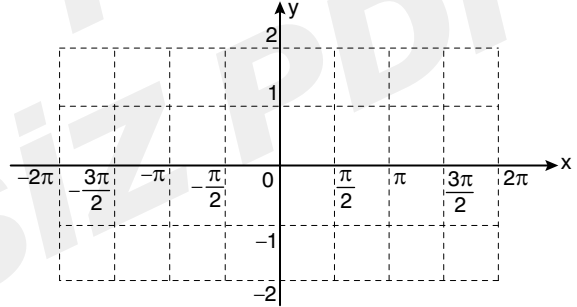
1. y = sin x veya y = cos x grafikleri başlangıç olarak alınır.
2. a > 1 ise grafik aşağıya ve yukarıya doğru genişletilir.
3. 0 < a < 1 ise grafik aşağıdan ve yukarıdan daraltılır.

## Örnek 20

x ∈ [-2π, 2π] için,

$$y = 2 \sin x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

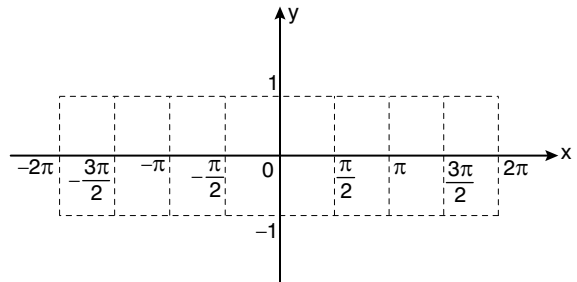


## Örnek 21

x ∈ [-2π, 2π] için,

$$y = \frac{1}{2} \cos x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.





### ▶ $y = -a \cdot \sin x$ Türündeki Fonksiyonların Grafiği

( $a > 0$  için)

$y = -a \cdot \sin x$  veya  $y = -a \cdot \cos x$  grafiklerini çizmek için,

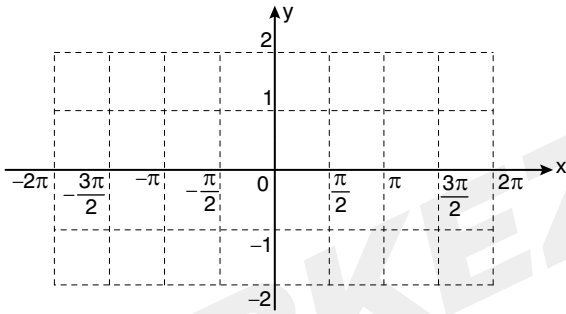
1.  $y = \sin x$  veya  $y = \cos x$  grafiklerinin **x eksenine göre simetriği** başlangıç olarak alınır.
2.  $a > 1$  ise grafik aşağıya ve yukarıya doğru genişletilir.
- ▶  $0 < a < 1$  ise grafik aşağıdan ve yukarıdan daraltılır.

### Örnek ▶ 22

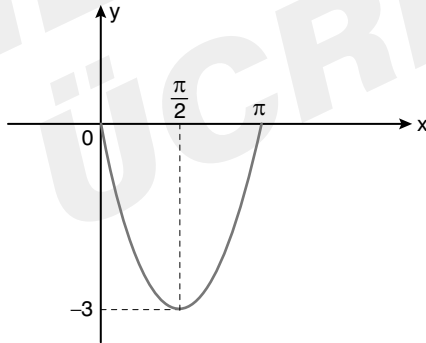
$x \in [-2\pi, 2\pi]$  için,

$$y = -2\cos x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



### Örnek ▶ 23



Şekilde,  $[0, \pi]$  aralığında grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $f(x) = 3\sin x$       B)  $f(x) = 3\cos x$       C)  $f(x) = -3\sin x$   
 D)  $f(x) = -3\cos x$       E)  $f(x) = \sin 3x$

### ▶ $y = \sin bx$ Türündeki Fonksiyonların Grafiği

( $b > 0$  için)

$y = \sin bx$  fonksiyonunda,  $b$  değeri değiştiğinde fonksiyonun periyodu da değişir.

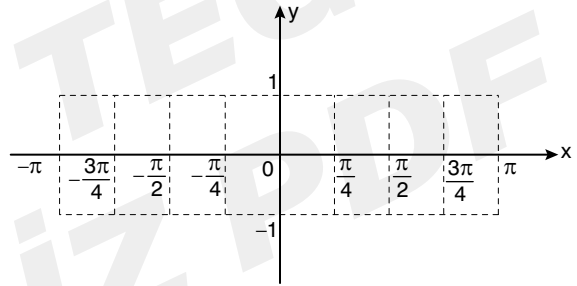
- ▶  $b > 1$  ise periyot küçülür.
- ▶  $0 < b < 1$  ise periyot büyür.

### Örnek ▶ 24

$x \in [-\pi, \pi]$  için,

$$y = -\sin 2x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

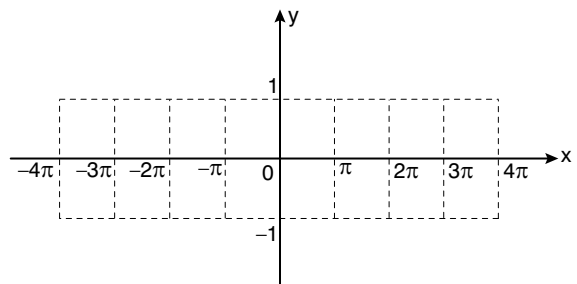


### Örnek ▶ 25

$x \in [-4\pi, 4\pi]$  için,

$$y = \cos \frac{x}{2}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.





## Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu ve Grafikleri

**▶ y = sin(-bx) Türündeki Fonksiyonların Grafiği**

(b &gt; 0 için)

$$y = \sin(-bx) = -\sin bx$$

$$y = \tan(-bx) = -\tan bx$$

$$y = \cot(-bx) = -\cot bx \text{ olduğundan,}$$

bu fonksiyonların grafikleri

$$y = \sin bx$$

$$y = \tan bx$$

$y = \cot bx$  fonksiyonlarının grafiklerinin x eksenine göre simetriğidir.

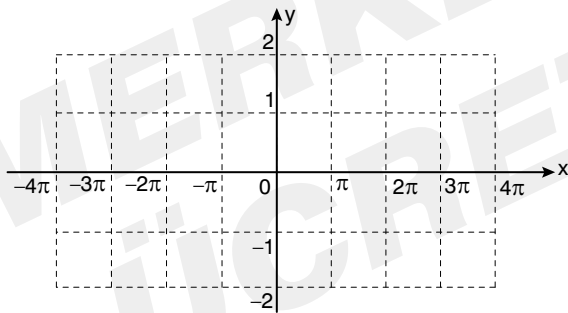
$$y = \cos(-bx) = \cos bx \text{ dir.}$$

$y = \cos(-bx)$  ile  $y = \cos bx$  in grafiği aynıdır.

**Örnek ▶ 26** $x \in [-4\pi, 4\pi]$  için,

$$y = 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**▶ y = sin(x + c) Türündeki Fonksiyonların Grafiği**

c &gt; 0 olmak üzere,

$y = \sin(x - c)$  nin grafiğini çizmek için,

$y = \sin x$  fonksiyonunun grafiği x eksenini doğrudan doğruya c birim sağa ötelenir.

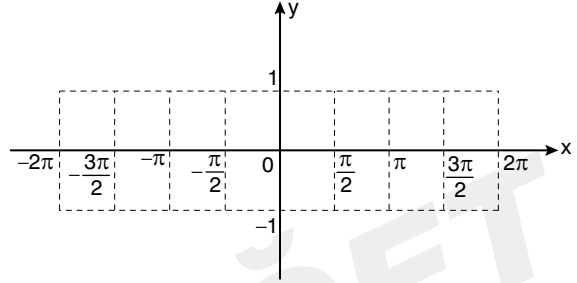
$y = \sin(x + c)$  nin grafiğini çizmek için,

$y = \sin x$  fonksiyonunun grafiği x eksenini doğrudan doğruya c birim sola ötelenir.

**Örnek ▶ 27** $x \in [-2\pi, 2\pi]$  için,

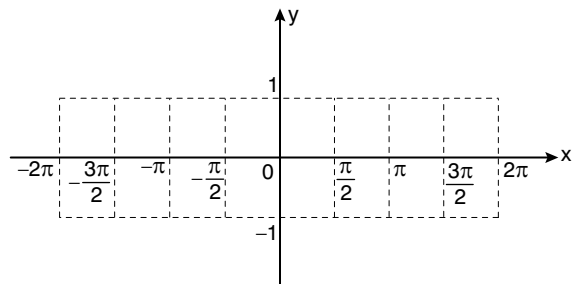
$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**Örnek ▶ 28** $x \in [-2\pi, 2\pi]$  için,

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.







### ▶ y = sin x + k Türündeki Fonksiyonların Grafiği

$k > 0$  olmak üzere,

$y = \sin x + k$  fonksiyonunun grafiğini çizmek için,

$y = \sin x$  fonksiyonunun grafiği  $y$  eksenini doğruğultusunda  $k$  birim yukarıya ötelenir.

$y = \sin x - k$  fonksiyonunun grafiğini çizmek için,

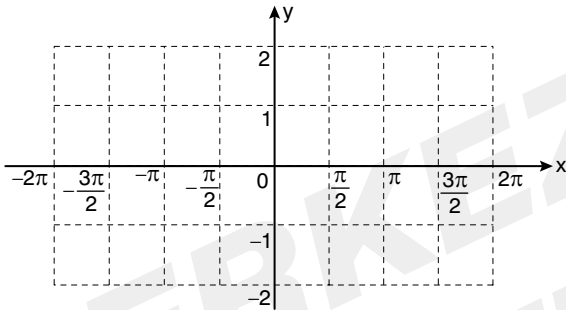
$y = \sin x$  fonksiyonunun grafiği  $y$  eksenini doğruğultusunda  $k$  birim aşağıya ötelenir.

### Örnek ▶ 29

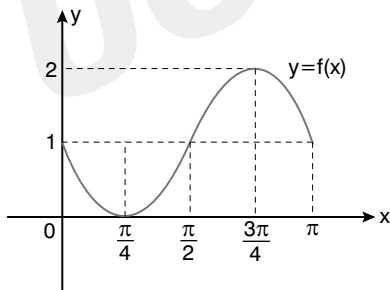
$x \in [-2\pi, 2\pi]$  için,

$$y = -1 + \cos x$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



### Örnek ▶ 30



Şekilde,  $[0, \pi]$  aralığında grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $f(x) = 1 - \cos 2x$     B)  $f(x) = 1 - \cos x$     C)  $f(x) = 1 - \sin x$   
 D)  $f(x) = 1 + \sin 2x$     E)  $f(x) = 1 - \sin 2x$

### ▶

$A(x_1, y_1)$  noktası,

$y = f(x)$  grafiği üzerindeki bir nokta ise  $A$  noktasının koordinatları grafiğin denklemini sağlar.

$$y_1 = f(x_1) \text{ yazılır.}$$

### Örnek ▶ 31

$A(\frac{\pi}{4}, -2)$  noktası,  $y = -1 + a \cos x$  fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

Buna göre,  $a$  kaçtır?

### Örnek ▶ 32

$A(\frac{\pi}{6}, -3)$  ve  $B(\pi, 2)$  noktaları,  $y = a + b \sin x$  fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

Buna göre,  $a + b$  toplamı kaçtır?

### Örnek ▶ 33

$A(\frac{\pi}{3}, 2)$ ,  $B(0, 1)$  noktaları,  $y = a + b \cos cx$  fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

Fonksiyonun periyodu  $\pi$  ve  $c > 0$  olduğuna göre,  $b$  kaçtır?

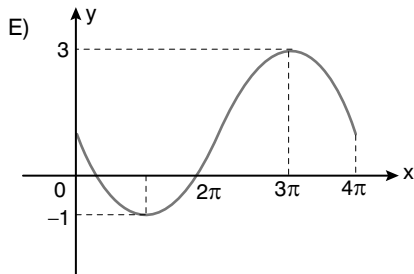
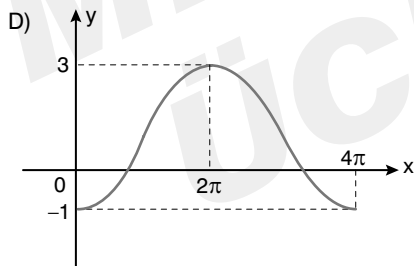
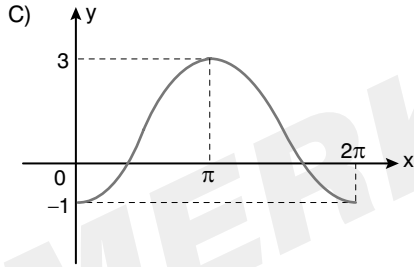
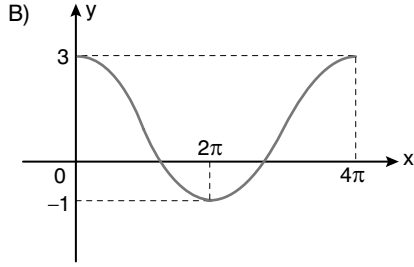
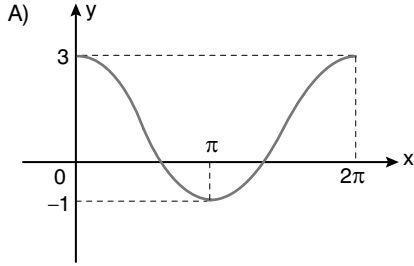


## Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu ve Grafikleri

## Örnek 34

$$y = 1 - 2\cos\frac{x}{2}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



## Örnek 35

$$y = -1 + 2\sin 2x$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

