



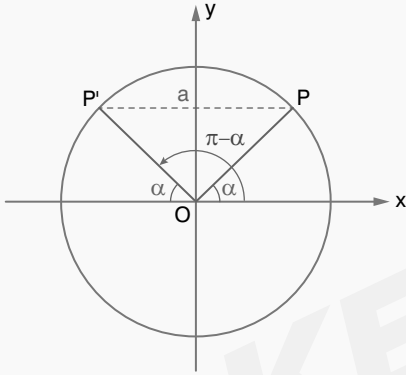
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

**sin x = a Denkleminin Çözümü**

-1 ≤ a ≤ 1 olmak üzere,

$$\sin x = a$$

denklemini sağlayan, [0, 2π) aralığındaki en küçük pozitif açının ölçüsü radyan cinsinden α olsun.



Şekildeki birim çemberde;

sin α = a ise sin(π - α) = sin α olduğundan,

aynı zamanda,

sin(π - α) = a olur.

α, denklemin bir kökü ise π - α da denklemin köküdür.

Sinüs fonksiyonunun periyodu 2π dir.

Buna göre, sin x = a denkleminin çözüm kümesi,

$\mathcal{C} = \{x \mid x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ veya } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  olur.

**Örnek 1**

x radyan türünden bir açı olmak üzere,

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

**Örnek 2**

x ∈ [0, 2π] için,

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 3**

x ∈ [0°, 360°] için,

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

denkleminin kökleri nedir?



Her x reel sayısı için -1 ≤ sin x ≤ 1 olduğundan,

a > 1 veya a < -1 için

$$\sin x = a$$

denkleminin çözüm kümesi boş kümedir.

**Örnek 4**

$$\sin x = \frac{5}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?



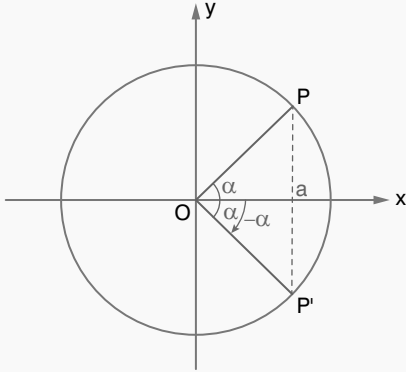
## Trigonometrik Denklemler

**cos x = a Denkleminin Çözümü**

$-1 \leq a \leq 1$  olmak üzere,

$$\cos x = a$$

denklemini sağlayan,  $[0, 2\pi)$  aralığındaki en küçük pozitif açının ölçüsü radyan cinsinden  $\alpha$  olsun.



Şekildeki birim çemberde;

$\cos \alpha = a$  ise  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  olduğundan,

aynı zamanda,

$\cos(-\alpha) = a$  olur.

$\alpha$ , denklemin bir kökü ise  $-\alpha$  da denklemin köküdür.

Kosinüs fonksiyonunun periyodu  $2\pi$  dir.

Buna göre,  $\cos x = a$  denkleminin çözüm kümesi,

$\mathcal{C} = \{x \mid x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ veya } x = -\alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  olur.

**Örnek 5**

$x$  derece türünden bir açı olmak üzere,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

**Örnek 6**

$$\cos x = -3$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

**Örnek 7**

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$  için,

$$\cos 3x = -\frac{1}{2}$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 8**

$x \in [0, \pi]$  için,

$$\cos 4x + 1 = 0$$

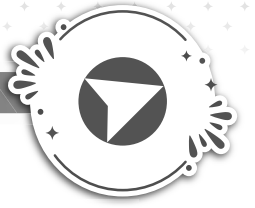
denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 9**

$x \in [0, 2\pi]$  için,

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos x$$

denkleminin kökleri nedir?


**Örnek 10**  $\sin x = \cos \alpha$  Denkleminin Çözümü

$\sin x = \cos \alpha$  denkleminde,

1.  $\sin x$  ifadesi yerine,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  yazılır.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \alpha$  denklemini elde edilir ve çözüm yapılır.

2. Ya da,  $\cos \alpha$  ifadesi yerine,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  yazılır.

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  denklemini elde edilir ve çözüm yapılır.

**Örnek 10**

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$  için,

$$\cos(3x + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 11**

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  için,

$$\cos 5x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 12**

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$  için,

$$\cos 2x - 3\cos x = 1$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 13**

$x \in [0, 2\pi]$  için,

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 14**

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$  için,

$$\operatorname{cosec}(2x - 36^\circ) - 2 = 0$$

denkleminin kökleri nedir?

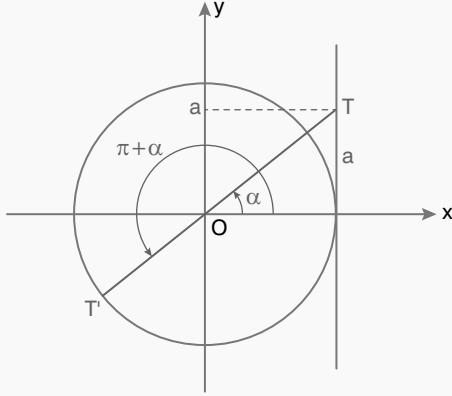


## Trigonometrik Denklemler

**tan x = a Denkleminin Çözümü**

$$\tan x = a$$

denklemini sağlayan,  $[0, 2\pi)$  aralığındaki en küçük pozitif açının ölçüsü radyan cinsinden  $\alpha$  olsun.



Tanjant fonksiyonunun periyodu  $\pi$  olduğundan,  $\tan x = a$  denkleminin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = \alpha + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olur.}$$

**Örnek 15**

x radyan türünden bir açı olmak üzere,

$$\tan x = \sqrt{3}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

**Örnek 16**

$x \in [0, 2\pi)$  için,

$$\tan 8x = 1$$

denkleminin kaç farklı kökü vardır?

**Örnek 17**

$x \in [0, 2\pi)$  için,

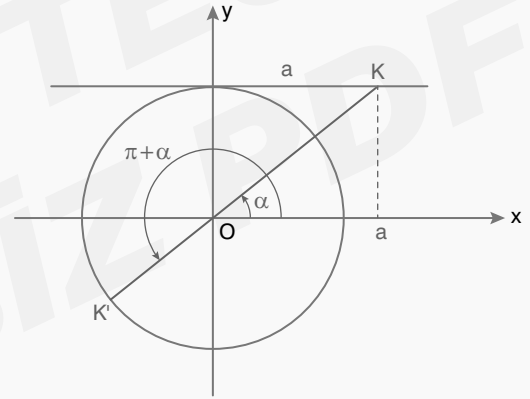
$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

denkleminin kökleri nedir?

**cot x = a Denkleminin Çözümü**

$$\cot x = a$$

denklemini sağlayan,  $[0, 2\pi)$  aralığındaki en küçük pozitif açının ölçüsü radyan cinsinden  $\alpha$  olsun.



Kotanjant fonksiyonunun periyodu  $\pi$  olduğundan,  $\cot x = a$  denkleminin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = \alpha + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olur.}$$

**Örnek 18**

$x \in [0, 2\pi)$  için,

$$\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

denkleminin kökleri nedir?



### tan x = cot α Denkleminin Çözümü

tan x = cot α denkleminde,

1. tan x ifadesi yerine,  $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  yazılır.

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot \alpha$  denklemini elde edilir ve çözüm yapılır.

2. Ya da, cot α ifadesi yerine,  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  yazılır.

tan x =  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  denklemini elde edilir ve çözüm yapılır.

### Örnek 19

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  için,

$$\cot 2x = \tan 4x$$

denkleminin kökleri nedir?

### Örnek 20

$x \in [0^\circ, 360^\circ]$  için,

$$\tan(3x + 36^\circ) = -\cot 2x$$

denkleminin kökleri nedir?

### Dikkat

- » Tanjant ve kotanjant içeren denklemlerde bulunan kök verilen ifadeyi tanımsız yapıyorsa bu kök çözüm kümesine alınmaz.
- » Payda içeren denklemlerde paydayı sıfır yapan kök çözüm kümesine içine alınmaz.

### Örnek 21

$x \in [0, 2\pi]$  için,

$$\tan 3x \cdot \tan 2x = -1$$

denkleminin kökleri nedir?

### Örnek 22

$x \in [0^\circ, 180^\circ]$  için,

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos x} = 0$$

denkleminin kökleri nedir?

### Örnek 23

$x \in [0, 2\pi]$  için,

$$\tan x = 1 - \cos 2x$$

denkleminin kökleri nedir?



## Trigonometrik Denklemler

 **$a \sin x + b \cos x = c$  Denkleminin Çözümü**

$a, b, c \in \mathbb{R}$  için,

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$  denklemini  $\cos x$  ve  $\sin x$  e bağlı doğrusal denklemdir.

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$  denkleminin çözümü için denklemin her iki tarafı,  $\sin x$  veya  $\cos x$  in katsayısına bölünür.

$\sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$  denkleminde;

$\frac{b}{a} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  yazarsak,

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha$$

denkleminin çözümü yapılır.

**Örnek 24**

$x \in [0, 2\pi)$  için,

$$\cos x + \sin x = -1$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 25**

$x \in [0, 2\pi)$  için,

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

denkleminin kökleri nedir?

**Örnek 26**

$$3 \sin x + 2 \cos x = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

**Örnek 26**

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = T$  ifadesi

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq T \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

aralığında değerler alır.

Eşitlik bu aralıkta verilmezse denklemin çözüm kümesi boş küme olur.

( $a, b, T, x \in \mathbb{R}$ )

**Örnek 27**

$4 \sin x - 5 \cos x$  ifadesinin alabileceği

a. en büyük değer kaçtır?

b. en küçük tam sayı değeri kaçtır?