



bölüm 4

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bir Fonksiyonun Tersi

$f : A \rightarrow B$, $f(x) = y$ fonksiyonu **bire bir ve örten** ise,

f^{-1} de fonksiyondur.

$$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x \text{ olur.}$$

Örnek ▷ 1

$$f(x) = -2x + 3$$

fonksiyonunun **bire bir ve örten olduğu aralık ve fonksiyonun tersi nedir?**

Örnek ▷ 2

$$f(x) = \frac{3x - 5}{4x + 1}$$

fonksiyonunun **bire bir ve örten olduğu aralık ve fonksiyonun tersi nedir?**

Örnek ▷ 3

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonunun **bire bir ve örten olduğu aralık ve fonksiyonun tersi nedir?**

Trigonometrik fonksiyonlar bire bir ve örten değildir.

Trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten fonksiyon olmaları için tanım ve değer kümeleri sınırlandırılır.

Sınırlandırılmış bu aralıklarda tersi de fonksiyon olur. Bu fonksiyonlara ters trigonometrik fonksiyonlar denir.

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Arkkosinüs Fonksiyonu

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında bire bir ve örtendir.

$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ olmak üzere,

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi,

$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,

$f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$ veya $f^{-1}(x) = \arccos x$ şeklinde gösterilir.



$y = \cos x$ ise $x = \arccos y$ olur.

x açısının kosinüsü y ise kosinüsü y olan açı x dir.

$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \dots$ radyan

$\arccos \frac{1}{2} = \dots$ radyan

$\arccos 0 = \dots$ radyan

$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dots$ radyan

$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots$ radyan

$\arccos 1 = \dots$ radyan

$\arccos (-1) = \dots$ radyan



Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Arksinüs Fonksiyonu

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında bire bir ve örtendir.

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$f^{-1}(x) = \sin^{-1}x$ veya $f^{-1}(x) = \arcsin x$ şeklinde gösterilir.



$y = \sin x$ ise $x = \arcsin y$ olur.

x açısının sinüsü y ise sinüsü y olan açı x dir.

- $\arcsin \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin 1 = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin(-1) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin(-\frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arcsin 0 = \dots\dots\dots$ radyan

Örnek 4

$$\cos(\arcsin \frac{1}{3})$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 5

$$\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 6

$$\sin(\arccos(-\frac{2}{3}))$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 7

$$f(x) = \arccos(3x - 5)$$

fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

**Örnek 8**

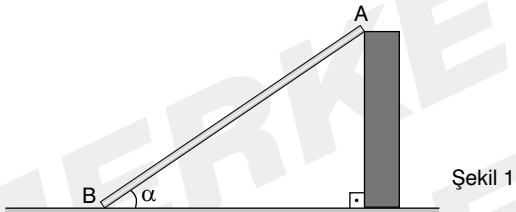
$$f(x) = 2 - \arcsin 3x$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

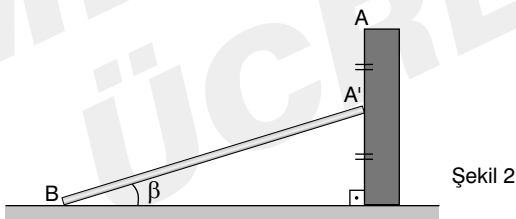
Örnek 9

$$\tan\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 10

Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de, duvara dayalı [AB] çubuğu yer ile α açısı yapıyor.

Şekil 2'de bir miktar sola kayan çubuğun üst ucu duvarın yarı yükseklğine geliyor ve yer ile β açısı yapıyor.

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{4}$$

$$\beta = \arccos k$$

olduğuna göre, k kaçtır?

Arkatanjant Fonksiyonu

$f(x) = \tan x$ fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bire bir ve örtendir.

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty) \text{ olmak üzere,}$$

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi,

$$f^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ veya $f^{-1}(x) = \arctan x$ şeklinde gösterilir.



$y = \tan x$ ise $x = \arctan y$ olur.

x açısının tanjantı y ise tanjantı y olan açı x dir.

- $\arctan 1 = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arctan(-1) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arctan(-\sqrt{3}) = \dots\dots\dots$ radyan
- $\arctan 0 = \dots\dots\dots$ radyan



Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Arkkotanjant Fonksiyonu

$f(x) = \cot x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında bire bir ve örtendir.

$f: (0, \pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun tersi,

$f^{-1}: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \pi)$,

$f^{-1}(x) = \cot^{-1}x$ veya $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ şeklinde gösterilir.



$y = \cot x$ ise $x = \operatorname{arccot} y$ olur.

x açısının kotanjantı y ise kotanjantı y olan açı x dir.

$\operatorname{arccot} 1 = \dots\dots\dots$ radyan

$\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3} = \dots\dots\dots$ radyan

$\operatorname{arccot} (-1) = \dots\dots\dots$ radyan

$\operatorname{arccot} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dots\dots\dots$ radyan

Örnek 11

$$\cos(\arctan(-\frac{5}{12}))$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 12

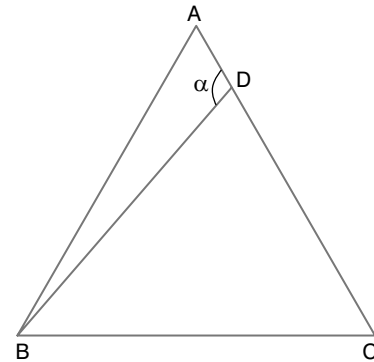
$$\sin(\operatorname{arccot}(-\frac{2}{3}))$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 13

$$f(x) = 3 \arctan(2x + 1)$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

Örnek 14

Şekilde, ABC bir eşkenar üçgen, $m(\widehat{ADB}) = \alpha$ dir.

$$\alpha = \operatorname{arccot}(-\frac{1}{3})$$

olduğuna göre, $\frac{|AD|}{|DC|}$ oranı kaçtır?



📺 Bileşke Fonksiyon

Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyondur.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(x) = x \text{ olduğundan,}$$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$$

$$\tan(\arctan x) = \arctan(\tan x) = x \text{ olur.}$$

Örnek ▷ 15

$$\arctan\left(\cos\frac{x+1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek ▷ 16

$$\arcsin(\tan x) = \frac{\pi}{3}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek ▷ 17

$$y = \frac{5}{\pi} \cdot \arctan x + 3$$

ifadesinin alabileceği değer aralığı nedir?

Örnek ▷ 18

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{5} - 3\right)$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

Örnek ▷ 19

$$\tan\left(\frac{1}{2} \cdot \arccos\frac{1}{3}\right)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek ▷ 20

$$\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek ▷ 21

$$\arctan k + \arccot k$$

ifadesinin eşiti kaçtır?



Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Örnek 22

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan 1\right)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 23

$$\cos(\pi - \arctan 3)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 24

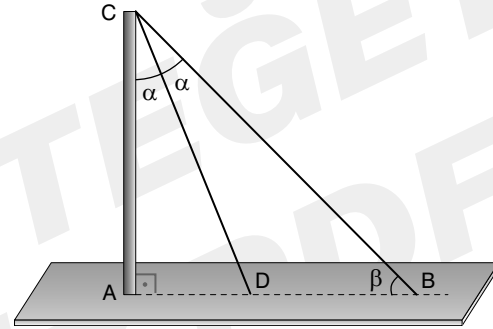
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{2}{3}\right)$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Örnek 25

$$\sec(\arctan x)$$

ifadesinin eşiti nedir?

Örnek 26

Şekilde, yere dik olan [AC] direği [CD] ve [CB] halatları ile yere bağlıdır. $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DCB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CBA}) = \beta$ dir.

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\beta = \arctan k$$

olduğuna göre, k kaçtır?

Örnek 27

$$\arccos x = \arctan \frac{2}{3}$$

olduğuna göre, x kaçtır?